ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Καθηγητης Ι. Κ. Πουρναρας

Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας

Πέμπτη 13 Ιουνίου 2024, 6-9 μ.μ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :

Α.Μ.:

1. i) Να αποδειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{C} := \{A \subseteq \mathbb{R} : \{-2, -1\} \cap A = \emptyset\}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ είναι μια τοπολογία στο $\mathbb{R}$.
ii) Να εξετασθεί αν ο τ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ είναι α) T_2, β) πρώτης αριθμησιμότητας γ) διαχωρίσιμος δ) Lindelof ε) συμπαγής.
iii) Να βρεθούν το εσωτερικό, η θήκη, το σύνορο και το παράγωγο σύνολο των συνόλων: $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $\mathbb{N}$, $C = [0, 1]$, $D = (-3, -1)$.

2. Ας είναι (E_1, τ_1), (E_2, τ_2) δυο τ.χ., και μια συνάρτηση $f : (E_1, \tau_1) \to (E_2, \tau_2)$.
i) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι $f(cl_{\tau_1}(A)) \subseteq cl_{\tau_2}[f(A)]$ για κάθε $A \subseteq E_1$.
ii) Για σύνολα $A, B \subseteq E_1$ να τοποθετηθεί το ακριβές σύμβολο (της ισότητας ή του εγκλεισμού) μεταξύ των συνόλων $(A \cap B)^o$ και $A^o \cap B^o$, και να αποδειχθεί η ισχύς της σχέσης. Πως σχετίζεται η ένωση των θηκών των συνόλων A, B με την θήκη του $A \cup B$;
iii) Να εξετασθεί η ισχύς της πρότασης: κάθε κανονικός τ. χ. είναι και χώρος T_2.

3. i) Ας είναι (E_1, τ_1) τ.χ., (E_2, τ_2) ένας Housdorff τ.χ., και συναρτήσεις $f, g : (E_1, \tau_1) \to (E_2, \tau_2)$. Αν υπάρχει πυκνό υποσύνολο $D \subseteq E_1$ τέτοιο ώστε $f/D = g/D$, τότε να αποδειχθεί ότι $f = g$. Να διατυπωθούν (στην γενικότητά τους) οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη.
ii) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί μια ισοδύναμη πρόταση για την κλειστότητα (θήκη) ενός υποσυνόλου A ενός τ.χ..
iii) Να διατυπωθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{B}$ ενός συνόλου E να είναι βάση για μια τοπολογία στον E και να αποδειχθεί η μια κατεύθυνση.

4. i) Να δοθεί ο ορισμός της συμπάγειας ενός τ.χ. (E_1, τ_1). Να διατυπωθεί μια ισοδύναμη του ορισμού της συμπάγειας πρόταση και να αποδειχθεί η μία κατεύθυνση.
ii) Αποκλειστικά με χρήση του ορισμού ή/και της πρότασης που διατυπώθηκε να εξετασθεί η συμπάγεια των συνόλων $A = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ και $B = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ του τ.χ. $(\mathbb{R}, |.|)$.
iii) Να αποδειχθεί ότι αν p είναι ένα σημείο συσσώρευσης του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ενός τ.χ. (E_1, τ_1), τότε υπάρχει υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ που συγκλίνει στο p.

5. i) Να δοθούν οι ορισμοί : α) δικτύου, β) υποδικτύου, γ)σημείου συσσώρευσης δικτύου σε ένα τ.χ. (E_1, τ_1).

ii) Να αποδειχθεί ότι αν σε έναν τ.χ. (E_1, τ_1) ισχύει ότι κάθε δίκτυο του τ.χ. συγκλίνει σε ένα το πολύ σημείο του, τότε ο χώρος είναι T_2.

iii) Θεωρούμε την οικογένεια των υποσυνόλων $E_i := [i, i+1], i \in \mathbb{R}$ του τ.χ. $(\mathbb{R}, |.|)$ και το γινόμενο $E := \Pi_{i \in \mathbb{R}} E_i$ των E_i, $i \in \mathbb{R}$. Να περιγραφούν τα στοιχεία α) του συνόλου E και β) της τοπολογίας γινόμενο στον E. Να εξετασθεί η συμπάγεια του τ.χ. του συνόλου E εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο, και, να διατυπωθούν (στην γενικότητά τους) οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα από τα πέντε βαθμολογικά ισοδύναμα Θέματα.

Καλή επιτυχία